Analiza zespolona
Lista 7

Zad 1. Wyznaczyć homotopię w $\mathbb{C}$ dla następujących krzywych:

a) $C(0,R)$ i $C(0,r)$, b) $C(1,2)$ i $C(0,1)$, c) półokręgu i jego średnicy.

Zad 2. Wyznaczyć homotopię w $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ dla następujących krzywych:

a) $C(2,1)$ i $C(-2,1)$,

b) $C(2,1)$ i $C(-3,2)$.

Zad 3. Zbiór $G \subset \mathbb{C}$ nazywamy gwiaździstym, jeśli istnieje taki punkt $a \in G$, że dla każdego $z \in G$ odcinek łączący a i z leży w G. Pokazać, że każda krzywa zamknięta leżąca w zbiorze gwiaździstym G jest homotopijna w G z pewnym punktem.

Zad 4. Wyznaczyć rozwinięcie Taylora funkcji $\frac{1}{z}$ wokół punktów $1, i, -1$ oraz znaleźć ich promienie zbieżności.

Zad 5. Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $f(z)$ w sąsiedztwie punktu z_0 i wyznaczyć pierścień zbieżności:

a) $f(z) = \frac{e^z}{z-\pi i}$, $z_0 = \pi i$,

b) $f(z) = \frac{z-2}{z(z^2+1)}$, $z_0 = -i$,

c) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)}$, $z_0 = 0$.

Zad 6. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ w szereg Laurenta w pierścieniu:

a) $P(-1;0,2)$, b) $P(1;0,2)$, c) $P(2;1,3)$,

d) $P(0;1,\infty)$, e) $P(0;0,1)$.

Zad 7. Rozwinąć funkcję $f(z)$ w szereg Laurenta w pierścieniu $P(z_0;r,R)$:

a) $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z-1)(z+1)}$, $P(1;0,2)$, *b)* $f(z) = \frac{1}{z(z+4)}$, $P(0;4,\infty)$,

c) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}$, $P(i;\sqrt{2},2)$, *d)* $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$, $P(0;0,1)$,

e) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)}$, $P(0;2,\infty)$, *f)* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $P(0;1,2)$.

Zad 8. W ilu pierścieniach o środku w punktach osobliwych (i optymalnych promieniach) można rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{(2-z)(3-z)^2}$ w szereg Laurenta?

Zad 9. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{(1-z)^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, w szereg Laurenta w obszarze $|z| < 1$ oraz $|z| > 1$.

Zad 10. Znaleźć zera funkcji $f(z)$ oraz zbadać ich krotność:

a) $f(z) = (z^3+1)^2 z^4$, *b)* $f(z) = z(e^{iz}-1)$, *c)* $f(z) = z\sinh z$.

Zad 11. Dowieść, że gdy funkcja f jest holomorficzna w zerze oraz $f(0) = 0$, to punkt $z = 0$ jest dla funkcji $z^{-1}f(z)$ pozornie osobliwy.

Zad 12. Wykazać, że punkt $z = 0$ jest punktem istotnie osobliwym dla funkcji $\exp(\frac{1}{z})$ oraz $\sin(\frac{1}{z})$.